2016

T H E S E

présentée

à l'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

Pour obtenir le titre de Docteur 3e Cycle

SPECIALITE : MATHEMATIQUE

par Abdelhamid KHALED

Sujet de la Thèse : FONCTIONS MEROMORPHES SUR UN ESPACE ANALYTIQUE COMPLEXE

Soutenue le 20 mai 1976 devant la Commission d'examen

MM. Samuel Président
Giraud } Examinateurs
Raynaud

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548102_0030

T H E S E

présentée

à l'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

Pour obtenir le titre de Docteur 3e Cycle

SPECIALITE : MATHEMATIQUE

par Abdelhamid KHALED

Sujet de la Thèse : FONCTIONS MEROMORPHES SUR UN ESPACE ANALYTIQUE COMPLEXE COMPACT

Soutenue le 20 mai 1976 devant la Commission d'examen

MM. Samuel Président

Giraud } Examinateurs

Raynaud

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

PREFACE

Le but de ce travail est de démontrer que le corps des fonctions méromorphes d'un espace analytique irréductible compact est une extension de type fini du corps des complexes. Pour cela on montre que toute fonction méromorphe sur une variété algébrique complète est rationnelle.

Je remercie M. Raynaud qui m'a guidé dans ce travail, ainsi que MM. Samuel et Giraud qui ont bien voulu faire partie du jury.
Je tiens à remercier Mme Bonnardel qui a assuré la frappe de cette thèse.

PARTIE I

Les variétés algébriques (resp. espaces analytiques) utilisées dans toute la suite sont des variétés algébriques complexes (resp. espaces analytiques) au sens de [10] (resp. au sens de [11]) .

Soit $(X,0_X)$ une variété algébrique. On sait lui associer ([11]) un espace analytique noté $(X^{an},\mathcal{H}_{X^{an}})$.

Soit plus généralement $(Y,\mathcal{H}_Y)$ un espace analytique.

On définit :

1°) Le faisceau des fonctions rationnelles $\mathcal{R}_X$.

Pour tout ouvert U non vide de X posons :

$M(U) = \{f \in \Gamma(U,0_X)$ tq f_x non diviseur de zéro dans $0_x \ \forall\, x \in U\}$

$R(U)_{M(U)} = \Gamma(U,0_X)_{M(U)}$ le localisé.

Si $V \subset U$ on a une application canonique $\varphi_V^U : R(U)_{M(U)} \to R(V)_{M(V)}$. Le système $\{R(U)_{M(U)}\ ,\ \varphi_V^U\}$ définit un préfaisceau d'anneaux.

Définition : Le faisceau $\mathcal{R}_X$ engendré par ce préfaisceau sera appelé le faisceau des fonctions rationnelles.

2°) Le faisceau $\mathcal{M}_Y$ des fonctions méromorphes de $(Y,\mathcal{H}_Y)$.

$\forall\, U$ ouvert non vide de Y on note :

$N(U) = \{h \in \mathcal{H}_Y(U)$ tq h_x non diviseur de zéro dans $(\mathcal{H}_Y)_x \ \forall\, x \in U\}$

$= \{h \in \mathcal{H}_Y(U)$ tq $\mathcal{B}(h)$ nulle part dense dans U avec

$$\mathcal{B}(h) = \{x \in U / h(x) = 0\} .$$

([1] page 410-44.27).

Définition : Le faisceau $\mathcal{M}_Y$ engendré par le préfaisceau d'anneaux

$$\{\mathcal{H}_Y(U)_{N(U)} \to \mathcal{H}_Y(V)_{N(V)} \ V \subset U\}$$

est appelé le faisceau des fonctions méromorphes sur Y .

Définition : Une variété algébrique $(X,\mathcal{O}_X)$ est dite complète si elle vérifie la condition :

{ Pour toute variété algébrique Y et pour toute partie fermée Z de $X \times Y$ la projection $pr_Y(Z)$ de Z est fermée dans Y .

Pour toute variété algébrique $(X,\mathcal{O}_X)$ on a une injection canonique :

$$(*) \qquad \Gamma(X,\mathcal{R}_X) \to \Gamma(X^{an},\mathcal{M}_{X^{an}}) .$$

Le problème est alors de démontrer que :

Théorème A : Soit $(X,\mathcal{O}_X)$ une variété algébrique complète : l'injection canonique $(*)$ est en fait un isomorphisme i.e. toute fonction méromorphe est rationnelle.

On utilisera ce résultat pour démontrer dans la 2è partie que le corps des fonctions méromorphes d'un espace analytique irréductible compact est une extension de type fini de $\mathbb{C}$ (corps des complexes).

I - Le lieu des pôles d'une fonction méromorphe.

Soit $\varphi \in \Gamma(Y,\mathcal{M}_Y)$.

Définition 1.1 : On appelle lieu des pôles de φ l'ensemble

$$P_\varphi = \{y \in Y / (\varphi)_y \notin (\mathcal{H}_Y)_y\} \quad \text{où} \quad (\varphi)_y \text{ est le germe } \varphi \text{ en } y\}.$$

On va montrer que P_φ est un sous-ensemble analytique de Y et cela en prouvant qu'il est le support d'un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{H}_Y$.

Définition 1.2 : Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{H}_Y$-Module. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ deux sous-$\mathcal{H}_Y$-Modules de On appelle transporteur de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{P}$ et on note $(\mathcal{P}:_{\mathcal{H}_Y}\mathcal{N})$ le faisceau $(\mathcal{P}:_{\mathcal{H}_Y}\mathcal{N}) = \mathrm{Ann}(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}})$ où $\mathrm{Ann}(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}) = \mathrm{Ker}\ \alpha$ avec $\alpha : \mathcal{H}_Y \to \mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}, \frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}})$.

Proposition 1.3 : Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{H}_Y$-Module $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ deux sous-Modules de $\mathcal{L}$. Supposons que $\mathcal{N}$ soit un $\mathcal{H}_Y$-Module de type fini. Alors

$$(\mathcal{P}:\mathcal{N})_{\mathcal{H}_Y x} = (\mathcal{P}_x : \mathcal{N}_x)_{(\mathcal{H}_Y)_x} \qquad \forall x \in Y .$$

Démonstration : Soit $u_x \in (\mathcal{H}_Y)_x$ t.q. $u_x \in (\mathcal{P}_x:\mathcal{N}_x)$ i.e. $u_x n_x \in \mathcal{P}_x \quad \forall n_x \in \mathcal{N}$

$\mathcal{N}$ étant de type fini $\exists$ $n^1,\ldots,n^q$ des sections de $\mathcal{N}$ définis sur un ouvert U de Y, voisinage de x telles que $n^1_y \ldots n^q_y$ engendrent $\mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$

$$\Longrightarrow u_x n^i_x \in \mathcal{P}_x \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant q .$$

Mais u_x est le germe d'une section u de $\mathcal{H}_Y$ définie dans un voisinage ouvert V de x, $V \subset U$.

On aura donc $u_y n^i_y \in \mathcal{P}_y$ ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ sont des sous-modules de $\mathcal{L}$) $\forall g \in W$ voisinage de x, $W \subset V$.

On montre alors que $u|W$ induit un homomorphisme nul de

$$\left(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\right)|W \longrightarrow \left(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\right)|W .$$

Il suffit de le voir sur les fibres de $\left(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\right)|W$.

Soit $y \in W$

$$\left(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\right)_y = \frac{\mathcal{P}_y+\mathcal{N}_y}{\mathcal{P}_y} \longrightarrow \frac{\mathcal{P}_y+\mathcal{N}_y}{\mathcal{P}_y}$$

$\forall\ p_y + n_y \in \mathcal{P}_y + \mathcal{N}_y \qquad \overline{u_y(p_y+n_y)} = \overline{u_y n_y}$.

Or $\qquad n_y = \sum_1^q v^i_y n^i_y \qquad$ où $v^i_y \in \mathcal{H}_y$

$$\Longrightarrow \overline{u_y n_y} = \sum \overline{v^i_y \underbrace{u_y n^i_y}_{\in \mathcal{P}_y}} = 0$$

$$\Longrightarrow u_x \in \operatorname{Ker} \alpha_x \quad \text{où} \quad \alpha_x = \mathcal{H}_x \longrightarrow \left(\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}\left(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}, \frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\right)\right)_x$$

avec $\operatorname{Ker} \alpha_x = (\mathcal{P}:\mathcal{N})_x$

$$\Longrightarrow (\mathcal{P}_x : \mathcal{N}_x)_{\mathcal{H}_x} \subset (\mathcal{P}:\mathcal{N})_x \subset \mathcal{H}_x .$$

Comme d'autre part on a :

$$\mathcal{H}_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_x}\left(\frac{\mathcal{P}_x+\mathcal{N}_x}{\mathcal{P}_x}\,,\,\frac{\mathcal{P}_x+\mathcal{N}_x}{\mathcal{P}_x}\right)$$

$$\left(\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}\left(\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\,,\,\frac{\mathcal{P}+\mathcal{N}}{\mathcal{P}}\right)\right)_x$$

$$\Longrightarrow (\mathcal{P}:\mathcal{N})_x \subset (\mathcal{P}_x : \mathcal{N}_x)$$

Proposition 1.4 : Pour qu'un sous $\mathcal{H}_Y$-Module $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_Y$ soit cohérent il faut et il suffit qu'il soit de type fini.

Démonstration : * La nécessité vient de la définition d'un faisceau cohérent.

* Supposons que $\mathcal{F}$ soit de type fini. Soit V un ouvert de Y , $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ des sections de $\Gamma(V,\mathcal{F})$.

Le problème étant local on peut supposer que V est assez petit de façon que l'on puisse écrire :

$$(\varphi_i)_y = \frac{h^i_y}{g^i_y} \quad \forall\, y \in V \qquad h^i, g^i \text{ définies sur } V$$

$$\mathcal{B}(g^i) \text{ nulle part dense dans } V$$

On veut montrer que le faisceau des relations $\mathcal{R}(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ de $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ est de type fini

$$(\mathcal{H}_Y|V)^p \longrightarrow \mathcal{F}|V \ .$$

Soit $y \in V$ $\qquad \Sigma\, f^i_y(\varphi_i)_y = 0 \iff \Sigma\, f^i_y \ \frac{h^i_y}{g^i_y} = 0$.

Comme (g^i_y) non diviseur de zéro $\Longrightarrow \prod_{i=1}^{p} (g^i)_y$ non diviseur de zéro dans $(\mathcal{H}_Y)_y$

On peut alors écrire $(\varphi_i)_y = \frac{k^i_y}{g_y} \quad \forall i$

$$\Longrightarrow \Sigma\, f^i_y \ \frac{k^i_y}{g_y} = 0 \iff \Sigma\, f^i_y \ k^i_y = 0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{R}(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) = \mathcal{R}(k^1,\ldots,k^p) \text{ qui est de type fini car } \mathcal{H}_Y$$

est cohérent.

(Cette proposition est l'analogue analytique de [10] § 40 prop. 4).

Conséquence : Si on note $\mathcal{H}_\varphi$ le faisceau $\varphi\,\mathcal{H}_Y$ et

$$\mathcal{C} = (\mathcal{H}_Y : \varphi\,\mathcal{H}_Y)_{\mathcal{H}_Y}$$

on a $$\mathcal{C}_x = (\mathcal{H}_x : \varphi_x \mathcal{H}_x)_{\mathcal{H}_x} .$$

En effet $\varphi\,\mathcal{H}_Y$ est cohérent (proposition précédente) et le résultat découle de 1.3.

Proposition 1.5 : Le faisceau $\mathcal{C}$ est $\mathcal{H}_Y$-cohérent.

1° Démonstration : $\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y$ est un sous-faisceau de $\mathcal{M}_Y$ et est cohérent (prop. 1.4). $\dfrac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_\varphi}{\mathcal{H}_Y}$ est cohérent ([10] p. 209 th. 2).

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}\left(\dfrac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y}{\mathcal{H}_Y}, \dfrac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y}{\mathcal{H}_Y}\right)$ est cohérent ([10] p. 210 prop. 6)

([10] p. 209 prop. 5) $\Longrightarrow$ $\left(\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}\left(\dfrac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y}{\mathcal{H}_Y}, \dfrac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y}{\mathcal{H}_Y}\right)\right)_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_x}\left(\dfrac{\mathcal{H}_x + \varphi_x \mathcal{H}_x}{\mathcal{H}_x}, \dfrac{\mathcal{H}_x + \varphi_x}{\mathcal{H}_x}\right.$

d'où $$\mathcal{H}_Y \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}\left(\frac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y}{\mathcal{H}_Y}, \frac{\mathcal{H}_Y + \varphi\,\mathcal{H}_Y}{\mathcal{H}_Y}\right) .$$

$\mathrm{Ker}\,\alpha = (\mathcal{H}_Y : \varphi\,\mathcal{H}_Y)_{\mathcal{H}_Y} = \mathcal{C}$ est cohérent ([10] th. 2 p. 209) et on retrouve que

$$\mathcal{C}_x = (\mathcal{H}_x : \varphi_x \mathcal{H}_x)_{\mathcal{H}_x} .$$

2° Démonstration : Soit $x \in Y$. $\exists$ un voisinage ouvert U de x , $\exists\, g$, $h \in \Gamma(U, \mathcal{H}_Y)$ tq h_y non diviseur de zéro dans $\mathcal{H}_y$ $\forall y \in U$ et telles que :

$$\varphi_y = h_y / g_y \quad \forall y \in U .$$

Soit l'application :

$$\mathcal{H}_Y \times \mathcal{H}_Y|U \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}_Y|U$$

$$(u_y , v_y) \longrightarrow u_y g_y - v_y h_y .$$

Soit $\mathfrak{L} = \operatorname{Ker} \theta$. $\mathfrak{L}$ est cohérent ([10] th. 2 page 209). On a la suite exacte de faisceaux cohérents :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L} \longrightarrow \mathcal{H}_Y \times \mathcal{H}_Y|U \longrightarrow \mathcal{H}_Y|U$$

$$\operatorname{pr}_1|\mathfrak{L} \searrow \quad \downarrow \operatorname{pr}_1$$

$$\mathcal{H}_Y|U$$

- Soit $u_y \in \mathfrak{Im}(\operatorname{pr}_1|\mathfrak{L}) \Longrightarrow \exists\ v_y \in \mathcal{H}_y$ tq $\operatorname{pr}_1(u_y,v_y) = u_y$ et $(u_y,v_y) \in \mathfrak{L}_y$

ie $u_y g_y - v_y h_y = 0$ ie $u_y \frac{g_y}{h_y} = v_y \in \mathcal{H}_y$

$\Longrightarrow u_y \in \mathcal{C}_y$ (voir conséquence prop. 1.4)

- Réciproquement : si $u_y \in \mathcal{C}_y$ $u_y \varphi_y = v_y \in \mathcal{H}_y$

$\Longrightarrow u_y g_y - v_y h_y = 0 \Longrightarrow (u_y,v_y) \in \mathfrak{L}_y$

$\Longrightarrow u_y \in \mathfrak{Im}(\operatorname{pr}_1|y)_y \Longrightarrow \mathcal{C}/u = \mathfrak{Im}(\operatorname{pr}_1|y)$

$\Longrightarrow \mathcal{C}$ est cohérent.

Théorème 1.6 : P_φ est un sous-ensemble analytique de Y .

Démonstration : $x \in P_\varphi \Longleftrightarrow 1_x \notin \mathcal{C}_x \Longleftrightarrow \mathcal{C}_x \neq \mathcal{H}_x$

$\Longleftrightarrow x \in \operatorname{supp}(\frac{\mathcal{H}_Y}{\mathcal{C}})$

$\Longrightarrow P_\varphi = \operatorname{supp}(\frac{\mathcal{H}_Y}{\mathcal{C}})$

$\Longrightarrow P_\varphi$ est analytique dans Y ([1] 44.24 page 409).

II - Décomposition de $\mathcal{R}_X$ et $\mathcal{M}_{X^{an}}$.

1) Le faisceau $\mathcal{R}_X$.

Soit $(X,\mathcal{O}_X)$ une variété algébrique $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ses composantes irréductibles. Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert affine de X . On a alors :

$\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \dfrac{\mathbb{C}[T_1 \ldots T_r]}{P_1 \cap \ldots \cap P_s}$ et soit $p_i = \dfrac{P_i}{P_1 \cap \ldots \cap P_s}$ les idéaux premiers minimaux correspondant aux sous-variétés X_i telles que $X_i \cap U \neq \emptyset$.

Posons $M(U) = \{f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ tq f_x non diviseur de zéro dans $(\mathcal{O}_X)_x$ $\forall\ x \in U\}$

Proposition 2.1 ([7] corollaire 2 p. 50 et lemme 8E p. 54) : L'ensemble des diviseurs de zéro de $\Gamma(U,0_X)$ est la réunion des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$.

Proposition 2.2 :

$$M(U) = \Gamma(U,0_X) - \bigcup_{i=1}^{s} p_i \ .$$

Démonstration : * Soit $f \in \Gamma(U,0_X) - \bigcup_{i=1}^{s} p_i$. Posons $\Gamma(U,0_X) = R$. Supposons qu'il existe $x \in U$ tq f_x diviseur de zéro dans 0_x . $0_x = R_{\mathcal{M}_x}$ où $\mathcal{M}_x$ est l'idéal maximal au point x . $R \longrightarrow R_{\mathcal{M}_x}$ il existe donc $h/g \neq 0$ $g \notin \mathcal{M}_x$ tq $f_x \frac{h}{g} = 0 \iff \exists\, k \notin \mathcal{M}_x$ tel que $kfh = 0$. Comme $h/g \neq 0 \implies kh \neq 0 \implies f$ diviseur de zéro dans $R \rightarrow f \in \bigcup_{i=1}^{s} p_i$ d'après 2.1. Contradiction.

* Réciproquement soit f tel que f_x non diviseur de zéro dans 0_x $\forall\, x \in U$. Supposons qu'il existe $h \neq 0$ $h \in R$ tq $f.h = 0$ $h \neq 0$ $x \in U$ tel que $h(x) \neq 0 \rightarrow h_x$ inversible dans $0_x \implies \frac{f}{1} \cdot \frac{h}{1} = 0$ dans 0_x .

Rappel d'algèbre commutative :

Si A est un anneau commutatif unitaire, on notera $\mathcal{L}(A)$ l'anneau quotient total de A .

Proposition 2.3 : Soit R un anneau noethérien tel que $\operatorname{rad}\{0\} = \{0\} = p_1 \cap \ldots \cap p_s$ (décomposition minimale de $\{0\}$) .

Soit V l'ensemble des non-diviseurs de zéro de R .

1°) Soit $\varphi : R \longrightarrow S = R/p_i$ un épimorphisme d'anneaux de noyau p_i . Soit W les éléments non nuls de S , $\mathcal{L}(R)$ et $\mathcal{L}(S)$ les anneaux quotients respectifs de R et S .

Alors $\varphi(V) = W$ et l'extension $\psi : \mathcal{L}(R) \longrightarrow \mathcal{L}(S)$ est surjective et $\operatorname{Ker}\psi = p_i\,\mathcal{L}(R)$; $p_i = R \cap p_i\,\mathcal{L}(R)$ et $p_i\,\mathcal{L}(R)$ est un idéal maximal de $\mathcal{L}(R)$.

2°) $\varphi_i : R \longrightarrow R/p_i \qquad P_i = p_i\,\mathcal{L}(R)$.

Alors $p_i = R \cap P_i$ $\quad i = 1$ à s $\quad \{0\} = P_1 \cap \ldots \cap P_s$ et les P_i sont les

idéaux premiers minimaux de zéro dans $\mathcal{L}(R)$

$$\psi_i : \mathcal{L}(R) \longrightarrow \mathcal{L}(R/p_i) .$$

De plus on a un isomorphisme $\mathcal{L}(R) \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} \psi_i} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{L}(R/p_i)$.

Conséquence : Si $U \neq \emptyset$ est un ouvert affine non vide de X $\Gamma(U, O_X) = R$

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^{s} (X_i \cap U) \qquad X_i \cap U \neq \emptyset .$$

Soient $p_1, \ldots p_s$ les idéaux premiers minimaux correspondant aux $X_i \cap U$.

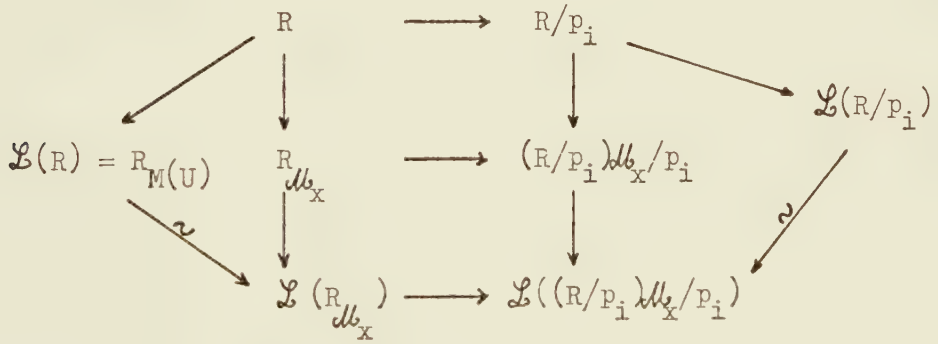
$$\{0\} = \bigcap_{i=1}^{s} p_i .$$

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi_i} & R/p_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}(R) = R_{M(U)} & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{L}(R/p_i) \end{array} \qquad \mathcal{L}(R) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{L}(R/p_i)$$

Soit X_i une composante irréductible telle que $X_i \cap U \neq \emptyset$ $U \cap X_i$ est un ouvert affine de X_i . De plus on a : $\Gamma(U \cap X_i , O_{X_i}) = R/p_i$ ([10] corollaire 3 p.237

Lemme 2.4 : Les notations étant celles ci-dessus on a le diagramme commutatif suivant :



Démonstration : * Il n'y a à montrer que les 2 isomorphismes.

Il suffit d'ailleurs de montrer que :

$$\psi : R_{M(U)} \longrightarrow \mathcal{L}(R_{dd_X}) \qquad \text{est un isomorphisme.}$$

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_{\mathcal{M}_x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z}(R) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L}(R_{\mathcal{M}_x}) \\ \| & & \\ R_{M(U)} & & \end{array}$$

* ψ est injective :

Soit $f/g \neq 0$ $g \in M(U)$ et supposons $\psi(f/g) = 0$

$\iff \exists \frac{h}{k} \in R_{\mathcal{M}_x}$ tq $\frac{h}{k}$ non diviseur de zéro

ie $\frac{h}{k} \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i R_{\mathcal{M}_x}$ $(\iff h \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i)$ et

$\frac{h}{k} \psi(f/g) = 0 \iff \frac{h}{k} \psi(\frac{f}{1}) = 0 \iff$ par commutativité du diagramme $\frac{h}{k} \cdot \frac{f}{1} = 0$ dans

$R_{\mathcal{M}_x} \iff \exists t \notin \mathcal{M}_x$ tq $thf = 0$.

Or $\bigcup_{i=1}^{s} p_i \subset \mathcal{M}_x \implies$ (si $t \notin \mathcal{M}_x$ alors $t \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i$)

$ht \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i \implies f = 0$.

* ψ est surjective :

Soit f/g , $\frac{k}{\ell} \in R_{\mathcal{M}_x}$ tq $\frac{k}{\ell} \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i R_{\mathcal{M}_x}$ ie $k \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i$. $\frac{f\ell}{gk}$ est bien définie car $g \notin \mathcal{M}_x \implies g \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i$. $\psi(\frac{f\ell}{gk}) = (f\ell/1)/(gk/1) = (f/g)/(k/\ell)$ car $f\ell/1 \cdot k/\ell - f/g \cdot gk/1 = fk/1 - fk/1 = 0$.

Théorème 2.5 : Soient $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes irréductibles de X . Soit $\mathcal{K}_{X_i}$ le faisceau des fonctions rationnelles de X_i .

$h_i : X_i \longrightarrow X$ les injections canoniques.

On a alors un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{R}_X \cong \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i_*}(\mathcal{K}_{X_i}) .$$

Démonstration : On a une application canonique pour chaque i :

$$\mathcal{R}_X \longrightarrow h_{i_*}(\mathcal{K}_{X_i}) .$$

Elle provient des applications :

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R/p_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{M(U)} & \longrightarrow & (R/p_i)_{M(U \cap X_i)} \end{array} .$$

$M(U \cap X_i)$ étant l'ensemble des non-diviseurs de zéro de $\frac{R}{p_i}$ ie $R/p_i - \{0\}$.

On a donc l'application

$$\mathcal{R}_X \xrightarrow{\oplus \psi_i} \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i}) .$$

$\bigoplus_{i=1}^{n} \psi_i$ est un isomorphisme. Il suffit de montrer que $\oplus \psi_i$ induit un isomorphisme sur chaque fibre.

Soit $x \in X$ et disons $X_1,\ldots,X_m$ les composantes irréductibles passant par

On a alors $\left(\bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i})\right)_x = \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathcal{H}_{X_i})_x$.

Soit U un ouvert affine non vide ne rencontrant que $X_1,\ldots,X_m$.

$U = \bigcup_{i=1}^{m} (U \cap X_i)$ $\quad \Gamma(U,\mathcal{O}_X) = R$

$\Gamma(U \cap X_i, \mathcal{O}_{X_i}) = R/p_i$ $\quad p_i$ l'idéal premier défini par $X_i \cap U$

dans R . $\{0\} = \mathrm{rad}_R(0) = p_1 \cap \ldots \cap p_m$.

Il suffit d'appliquer la proposition 2.3 et le lemme 2.4

2) Le faisceau des fonctions

$$\begin{array}{ccc} X_i^{an} & \xrightarrow{h_i^{an}} & X^{an} \\ \downarrow I_i & & \downarrow I \\ X_i & \xrightarrow{h_i} & X \end{array}$$

Proposition 2.6 : Soit X une variété algébrique irréductible complète. Alors X^{an} l'espace analytique associé est analytiquement irréductible.

Démonstration : Supposons que $X^{an} = Y_1 \cup Y_2$ deux sous ensembles analytiques distincts non vides de X^{an} .

D'après ([11] prop. 6 page 12) X^{an} est compacte $\Longrightarrow$ Y_1 et Y_2 compacts.

([11] prop.14 page 29) Y_1 et Y_2 sont algébriques.

Corollaire 2.7 : Les composantes irréductibles d'une variété algébrique complète X sont exactement ses composantes analytiques irréductibles.

Décomposition du germe de X^{an} en un de ses points lorsque X est complète.

Soit $a \in X^{an}$. Soit $X_1^{an},\dots,X_m^{an}$ les composantes irréductibles de X^{an} passant par a.

Soit $(X_i^{an})_a = X'_{i_1} \cup \dots \cup X'_{i_{q_i}}$ les composantes irréductibles du germe de X_i^{an} en a.

On a alors ([1] 44.32 p. 415) :

1) $(X^{an})_a = \bigcup_{i=1}^{m} (X_i^{an})_a = \bigcup_{i,j} X'_{i_j}$.

2) Les X'_{i_j} sont toutes distinctes.

Soit $\mathcal{J}(X_i,X)$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par la sous-vari X_i, $\mathcal{J}(X_i,X)_a$ sa fibre en a.

Soit $\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{H}_{X^{an}}$ défini par le sous espace analytique X_i^{an}, $\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a$ sa fibre en a.

Lemme 2.8 ([11] prop. 4 page 10) : L'idéal $\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a$ est engendré par l'image de $\mathcal{J}(X_i,X)_a$ par l'application $\mathcal{O}_a \longrightarrow (\mathcal{H}_{X^{an}})_a$.

Remarque 2.9 : Soient $p_1,\dots p_m$ les idéaux premiers de $\mathcal{O}_a$ correspondant aux sous-variétés $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ passant par a. $p_i = \mathcal{J}(X_i,X)_a$.
$\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a = p_i \mathcal{H}_a = P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_{q_i}}$ où les P_{i_j} sont les idéaux premiers correspondant aux germes X'_{i_j}. De plus :

- Il n'y a aucune relation d'inclusion entre les P_{i_j}
- $\{0\}_{\mathcal{H}_a} = \cap P_{i_j}$.

On supposera que $(X,0_X)$ est complète pour le reste du paragraphe.

Proposition 2.10 : Considérons l'injection $X_i^{an} \xrightarrow{h_i^{an}} X^{an}$.

On a un morphisme canonique de $\mathcal{H}_{X^{an}}$ algèbres :

$$\mathcal{M}_{X^{an}} \longrightarrow h_{i*}^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})$$

c'est une conséquence du :

Lemme 2.11 : Soit U un ouvert non vide de X^{an}, g une fonction holomorphe sur U telle que $\mathcal{B}(g)$ nulle part dense dans U. Soit X_i une composante irréductible de X telle que $X_i \cap U \neq \emptyset$.

Alors $\mathcal{B}(g_{|X_i \cap U})$ est nulle part dense dans $X_i \cap U$.

Démonstration : ([1] 44.15 page 407) $\Longrightarrow$ $(\mathcal{B}(g))$ ne contient aucune composante irréductible de $(X^{an})_a$ $\Longrightarrow$ aucune composante irréductible de $(X_i^{an})_a$ et cela $\forall a \in U$.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}(g_i)$ nulle part dense dans $X_i^{an} \cap U$.

Théorème 2.12 : Soient $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes irréductibles de X.

L'application canonique :

$$\mathcal{M}_{X^{an}} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Il suffit de le voir sur chaque fibre.

Soit $a \in X^{an}$. On peut supposer que les composantes irréductibles de X^{an} passant par a sont $X_1^{an},\ldots,X_m^{an}$. Remarquons que $(\mathcal{M}_{X^{an}})_a$ est l'anneau quotient total de $(\mathcal{H}_{X^{an}})_a$.

On a déjà vu que $\{0\} = \bigcap P_{i_j} = \bigcap_{i=1}^{m} (\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a)$ avec $\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a = \bigcap_{i=1}^{q_i} P_{i_j}$.

De plus $\dfrac{(\mathcal{H}_{X^{an}})_a}{\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a} = (\mathcal{H}_{X_i^{an}})_a$.

En notant toujours $\mathcal{L}(A)$ l'anneau quotient d'un anneau A on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathcal{H}_{X^{an}})_a & \longrightarrow & \dfrac{(\mathcal{H}_{X^{an}})_a}{\mathcal{A}(X_i^{an},X^{an})_a} & = & (\mathcal{H}_{X_i^{an}})_a \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathcal{L}((\mathcal{H}_{X^{an}})_a) = (\mathcal{M}_{X^{an}})_a & & \longrightarrow & & \mathcal{L}((\mathcal{H}_{X_i^{an}})_a).
\end{array}$$

De plus d'après la proposition 2.3 on a :

$$(\mathcal{M}_{X^{an}})_a \cong \bigoplus_{i,j} \mathcal{L}\left(\frac{(\mathcal{H}_{X^{an}})_a}{P_{i_j}}\right) = \bigoplus_{i=1}^{m}\left[\bigoplus_{j=1}^{q_i} \mathcal{L}\left(\frac{(\mathcal{H}_{X^{an}})_a}{P_{i_j}}\right)\right]$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{L}\left((\mathcal{H}_{X_i^{an}})_a\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(h_{i*}^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})\right)_a \quad . \qquad \text{CQFD.}$$

III - Réductions du problème.

Dans tout ce paragraphe (X,O_X) est complète.

1) 1° Réduction.

Proposition 3.1 : On a un homomorphisme de O_X algèbres

$$\mathcal{R}_X \longrightarrow I_*(\mathcal{M}_{X^{an}}) \quad \text{où} \quad I : X^{an} \longrightarrow X \ .$$

Démonstration : Il suffit de construire un hom du préfaisceau engendrant $\mathcal{R}$ dans $I_*(\mathcal{M}_{X^{an}})$.

Soit U un ouvert affine de X . $\Gamma(U,O_X) = R$. Soient $X_1,\dots X_s$ les composantes irréductibles de X tq $X_i \cap U \neq \emptyset$, $p_1,\dots p_s$ les idéaux premiers minimaux de R correspondants.

Soit $f/g \in R_{M(U)}$ $\quad g \notin \bigcup_{i=1}^{s} p_i$ $\quad \Gamma(U \cap X_i, O_{X_i}) = R/p_i$.

D'après la proposition 2.3 1° $g \neq 0$ dans R/p_i .

$\Longrightarrow (U \cap X_i - B(g|U \cap X_i))$ partout dense dans $U \cap X_i$. ([1] 44.9 et 44.15)

$\mathcal{B}(g|U \cap X_i)$ ne contient aucune composante irréductible de $(X_i^{an})_a$

$\forall\, a \in U \cap X_i \Longrightarrow \mathcal{B}(g)$ nulle part dense dans $U \Longrightarrow f/g \in (\mathcal{H}_{X^{an}}(U))_{N(U)}$ d'où

$\mathcal{R}_X \xrightarrow{\pi} I_*(\mathcal{M}_{X^{an}})$.

Remarque 3.2 : On a déjà vu qu'on a :

$$\begin{array}{ccc} X_i^{an} & \xrightarrow{h_i^{an}} & X^{an} \\ {\scriptstyle I_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I} \\ X^i & \xrightarrow{h_i} & X \end{array}$$

1°) un isomorphisme $\mathcal{R}_X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i})$

2°) un isomorphisme $\mathcal{M}_{X^{an}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})$

ce dernier donne en passant aux faisceaux Images directes d'isomorphisme

$$I_*(\mathcal{M}_{X^{an}}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} I_* \, h_{i*}^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})$$

3°) de même le morphisme (vu pour X)

$$\mathcal{H}_{X_i} \xrightarrow{\pi_i} I_{i*}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})$$

donne :

$$h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i}) \xrightarrow{h_{i*}(\pi_i)} h_{i*}[I_{i*}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})] \, .$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_X & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \bigoplus_{i=1}^{n} I_{i*}(\pi_i) \\ I_*(\mathcal{M}_{X^{an}}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} I_*(h_i^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})) = \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}[I_{i*}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})] \end{array}$$

Proposition 3.3 : Le morphisme $\mathcal{R}_X \longrightarrow I_*(\mathcal{M}_{X^{an}})$ est injectif.

Démonstration : D'après le diagramme précédent il suffit de démontrer que $I_{i*}(\pi_i)$ est injectif pour $i = 1$ à n.

Considérons donc le morphisme $h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i}) \xrightarrow{I_{i*}(\pi_i)} h_{i*} \, I_{i*}(\mathcal{M}_{X_i^{an}})$

- si $x \notin X_i$ $\quad (h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i}))_x = 0$

- sinon $(h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i}))_x = (\mathcal{H}_{X_i})_x$ qui est au corps $\Longrightarrow (I_{i*}(\pi_i))_x$ injective

$\Longrightarrow I_{i*}(\pi_i)$ injectif sur chaque fibre.

Conséquence : On a

1°) une injection $0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}_X) \longrightarrow \Gamma(X, I_X(\mathcal{M}_{X^{an}})) = \Gamma(X^{an}, \mathcal{M}_{X^{an}})$

2°) $\Gamma(X, \mathcal{M}_X) = \bigoplus_{i=1}^{n} h_{i*}(\mathcal{H}_{X_i})(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(X_i, \mathcal{M}_{X_i})$

$$3^\circ)\quad \Gamma(X^{an}, \mathcal{M}_{X^{an}}) = \bigoplus_{i=1}^{n} I_{i*}(h_{i*}^{an}(\mathcal{M}_{X_i^{an}}))(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(X_i, \mathcal{M}_{X_i^{an}})$$

$$4^\circ)\quad 0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(X_i, \mathcal{K}_{X_i}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(X_i^{an}, \mathcal{M}_{X_i^{an}})$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\Gamma(X, \mathcal{R}_X) \qquad \Gamma(X^{an}, \mathcal{M}_{X^{an}})$$

Pour résoudre le problème de l'isomorphisme $\Gamma(X, \mathcal{R}_X) \longrightarrow \Gamma(X^{an}, \mathcal{M}_{X^{an}})$ il suffi de le résoudre pour chaque composante irréductible de X .

2° Réduction du problème.

Les composantes irréductibles des variétés complètes étant complètes, on supposera que $(X, 0_X)$ est irréductible complète.

Proposition 3.4 ([4] p. 131 corollaire) : La normalisée d'une variété complète est complète.

Proposition 3.5 ([4] corollaire 2 p. 113) : Soient X et Z deux variétés algébriques irréductibles de $Z \to X$ un morphisme birationnel dominant. Alors il existe un ouvert non vide V de X tel que la restriction $u^{-1}(V) \longrightarrow V$ de u soit un isomorphisme.

Proposition 3.6 : Soient Z , X deux variétés algébriques irréductibles $u : Z \to X$ un morphisme dominant birationnel.

On a alors un morphisme canonique de $\mathcal{H}_{X^{an}}$-algèbres :

$$\mathcal{M}_{X^{an}} \longrightarrow u_*^{an}(\mathcal{M}_{Z^{an}}) .$$

Démonstration :

$$\begin{array}{ccc} Z^{an} & \longrightarrow & Z \\ \downarrow u^{an} & & \downarrow u \\ X^{an} & \longrightarrow & X \end{array}$$

a) Soit V un ouvert de X^{an} $g \in \mathcal{H}_{X^{an}}(V)$ tq $\mathcal{B}(g)$ nulle part dense dans V .

Alors $\mathcal{B}(gou)$ est nulle part dense dans $u^{-1}(V)$.

En effet $\exists$ un ouvert non vide U contenu dans V tel que

$$\begin{array}{ccc} Z & \longleftarrow & u^{-1}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & V \end{array}$$

la restriction $u' : u^{-1}(U) \to U$ de u soit un isomorphisme (3.5). $u^{-1}(U)$ est $\mathbb{Z}$-dense dans Z (i.e dense pour la topologie de Zariski de Z) $\Longrightarrow u^{-1}(U)$ est dense dans Z ([11] page 11 prop. 5). On a la même propriété pour U dans X. Soit alors W un ouvert non vide dans $u^{-1}(V)$ $W \cap u^{-1}(U) \neq \emptyset$.

$u'(W \cap u^{-1}(U))$ est un ouvert de V

$\Longrightarrow \exists$ un ouvert $V_1 \subset u'(W \cap u^{-1}(U)$ tq $V_1 \cap \mathcal{B}(g) \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow u'^{-1}(V_1) \cap \mathcal{B}(gou) \neq \emptyset \\ \quad \cap \\ \quad W \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{B}(gou) \text{ nulle part dense dans } u^{-1}(V).$$

b) Soit $\varphi \in \mathcal{M}_{X^{an}}(V)$. En prenant V assez petit on peut supposer qu'il $\exists$ h, g holomorphes sur V telles que $\mathcal{B}(g)$ nulle part dense dans V et

$$\varphi_x = \frac{h_x}{g_x} \quad \forall x \in V.$$

On définit $u_*(\varphi)$ par $u_*(\varphi) = \frac{hou}{gou}$ ce qui a un sens d'après a).

<u>On a bien une application</u> : En prenant au besoin V plus petit supposons qu'on ait $\varphi_x = \frac{k_x}{\ell_x}$ $\forall x \in V$ k, ℓ holomorphes sur V et $\mathcal{B}(\ell)$ nulle part dense dans V.

Soit $b \in V$ et $a \in u^{-1}(V)$ tq $u(a) = b$.

$\varphi_b = \frac{h_b}{g_b} = \frac{k_b}{\ell_b} \Longleftrightarrow \exists\, t_b$ germe de t holomorphe sur un voisinage $W \subset V$ $b \in W$ $\mathcal{B}(t)$ nulle part dense dans W tel que

$$t_b(\ell_b h_b - k_b g_b) = 0 \Longleftrightarrow \ell_b h_b - k_b g_b = 0$$

$\Longleftrightarrow (\ell ou)(hou) - (kou)(gou) = 0$ dans un voisinage ouvert non vide de a.

cqfd

<u>Proposition</u> 3.7 : Avec les mêmes hypothèses que (3.6) le morphisme

$$\mathcal{M}_{X^{an}} \longrightarrow u_*^{an}(\mathcal{M}_{Z^{an}}) \quad \text{est injectif.}$$

<u>Démonstration</u> : $b \in X^{an}$ et soient $\varphi_b, \psi_b \in (\mathcal{M}_{X^{an}})_b$. $\exists$ un voisinage V et h, g, k, ℓ holomorphes sur V et telles que $\mathcal{B}(g)$ et $\mathcal{B}(\ell)$ nulle part dens

dans V et

$$\varphi_x = \frac{h_x}{\varepsilon_x} \qquad \psi_x = \frac{k_x}{\ell_x} \qquad \forall\, x \in V\ .$$

Supposons alors que $(u_*^{an})_b(\varphi_b) = (u_*^{an})_b(\psi_b)$, on aura alors

$$\frac{(hou)}{(\varepsilon ou)} = \frac{(kou)}{(\ell ou)} \qquad \forall \quad \in u^{-1}(V)$$

$$\Longrightarrow h_b\ell_b - k_b\varepsilon_b = 0 \Longrightarrow \psi_b = \varphi_b\ .$$

Conséquence : Soit X_n la normalisée de X .

On sait qu'on a un morphisme dominant birationnel :

$$X_n \xrightarrow{u} X\ .$$

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_n^{an} & \xrightarrow{I_n} & X_n \\ {\scriptstyle u^{an}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ X^{an} & \xrightarrow{I} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}_X & \longrightarrow & I_*(\mathcal{M}_{X^{an}}) \\ \wr\downarrow & & \downarrow \\ u_*(\mathcal{K}_{X_n}) & \longrightarrow & u_*(I_n)_*(\mathcal{M}_{X^{an}}) = I_*((u_*^{an})(\mathcal{M}_{X_n^{an}}))\ . \end{array}$$

On voit donc que le théorème (A) sera prouvé si on le démontre pour la normalisée X_n de X .

3° Réduction du problème.

Soit X une variété normale irréductible complète.

D'après ([9] page 115) $\exists$ une sous variété projective fermée Z de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ pour un certain entier n et un morphisme dominant birationnel :

$$Z \xrightarrow{u} X$$

on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{K}_X) & \xrightarrow{\text{injective}} & \Gamma(X^{an}, \mathcal{M}_{X^{an}}) \\ & & \wr\downarrow & & \downarrow \text{injective} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(Z, \mathcal{K}_Z) & \xrightarrow{\text{injective}} & \Gamma(Z^{an}, \mathcal{M}_{Z^{an}}) \end{array}$$

Il suffit donc de faire la démonstration du théorème (A) pour $(X,\mathcal{O}_X)$ une variét projective irréductible (qui est évidemment complète). Comme on montrera dans un résultat indépendant dans la 2è partie que la normalisée d'une variété projective est projective (Th. 3.6 2è partie). On peut donc supposer que $(X,\mathcal{O}_X)$ est irréductible, normale, projective.

IV - Le théorème A .

$(X,\mathcal{O}_X)$ est une variété algébrique irréductible, projective, normale.

$$\varphi \in \Gamma(X^{an},\mathcal{M}_{X^{an}}) \qquad \mathcal{C} = (\mathcal{H}_{X^{an}} : \varphi.\mathcal{H}_{X^{an}}) \ .$$

On définit alors le sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{M}_{X^{an}}$ $\mathcal{J}$ par :

$U \subset X^{an}$ ouvert non vide $\Gamma(U,\mathcal{J}) = \{h \subset \Gamma(U,\mathcal{M}_{X^{an}})$ tq $h.\mathcal{C}|U \subset \mathcal{H}_{X^{an}}|U\}$.

Lemme 4.1 : Considérons le sous faisceaux de $\mathcal{M}_{X^{an}}$ engendré par $\mathcal{C}$ est noté $\mathcal{C}\mathcal{M}_{X^{an}}$.

Alors $\mathcal{C}\mathcal{M}_{X^{an}}$ contient le faisceau $\mathcal{H}_{X^{an}}$.

Démonstration : Localement $\varphi = h/g$ $h,g \in \Gamma(U,\mathcal{H}_{X^{an}})$ U ouvert de X^{an} g_x non diviseur de zéro dans $(\mathcal{H}_{X^{an}})_x$ $\forall\, x \in U$. $g \in \Gamma(U,\mathcal{C})$ g inversible dans $\Gamma(U,\mathcal{M}_{X^{an}})$.

Si $f \in \Gamma(U,\mathcal{H}_{X^{an}})$ $fg \in \Gamma(U,\mathcal{C})$. Comme $1/g \in \Gamma(U,\mathcal{M}_{X^{an}})$.

$\Longrightarrow f \in \Gamma(U,\mathcal{C}\mathcal{M}_{X^{an}}) \Longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{M}_{X^{an}}$ est un $\mathcal{H}_{X^{an}}$ module . cqfd.

Considérons l'application de $\mathcal{H}_{X^{an}}$-modules :

$$\mathcal{M}_{X^{an}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}om_{\mathcal{H}_{X^{an}}}\left(\mathcal{C}, \frac{\mathcal{C}\mathcal{M}_{X^{an}}}{\mathcal{H}_{X^{an}}}\right)$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\psi \longrightarrow \mathcal{M}_{X^{an}} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{H}_{X^{an}}}\left(\mathcal{C}, \frac{\mathcal{C}\mathcal{M}_{X^{an}}}{\mathcal{H}_{X^{an}}}\right)$$

alors $\operatorname{Ker}\psi = \mathcal{J}$.

Proposition 4.2 : $\mathcal{J}$ est un $\mathcal{H}_{X^{an}}$-module cohérent.

Démonstration : Localement $\varphi = h/g$ g_x non diviseur de zéro $\forall x \in U$

$$g \in \Gamma(U, \mathcal{C}) \quad , \quad g\, \mathcal{H}_{X^{an}}|U \subset \mathcal{C}|U \ .$$

Si $\ell \in \Gamma(U, \mathcal{J})$ alors $\ell g \in \mathcal{H}_{X^{an}}(U)$

$$\Longrightarrow \mathcal{J}|U \subset 1/g \ \ \mathcal{H}_{X^{an}}|U \ .$$

Considérons le morphisme de faisceaux :

$$1/g \ \mathcal{H}_{X^{an}}|U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}om_{\mathcal{H}_{X^{an}}|U}(\mathcal{C}|U \ , \ 1/g \ \ \mathcal{C}|U / \mathcal{H}_{X^{an}}|U)$$

$\mathcal{J}|U = \operatorname{Ker} \alpha$. Comme $1/g . \mathcal{C}|U$ et $\mathcal{H}_{X^{an}}|U$ sont cohérents

$\Longrightarrow \mathcal{J}|U$ est $\mathcal{H}_{X^{an}}\, U$ cohérent $\Longrightarrow \mathcal{J}$ est $\mathcal{H}_{X^{an}}$ cohérent.

On a donc les inclusions :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_{X^{an}} & \subset & \mathcal{J} & \subset & \mathcal{M}_{X^{an}} \\ \| & & & & \\ (\mathcal{O}_X)^{an} & \subset & \mathcal{J} & \subset & \mathcal{M}_{X^{an}} \ . \end{array}$$

D'après [11] un faisceau algébrique $\mathcal{O}_X$ cohérent J tq $J^{an} \cong \mathcal{J}$.

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow J \ .$$

Considérons alors le faisceau $J \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{K}_X$. $\mathcal{K}_X$ faisceau constant des fonctions rationnelles.

On a des homomorphismes canoniques :

$$J \longrightarrow J \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{K}_X$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_X \longrightarrow J \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{K}_X \ .$$

Lemme 4.3 : $\exists$ un ouvert non vide U de X tq $\mathcal{J}|U = \mathcal{H}_{X^{an}}|U$.

Démonstration : Il suffit de voir que localement $\varphi = h/g$ sur V.

$U = \{x \in V / g(x) \neq 0\}$ est un ouvert dans V donc dans X

$$\mathcal{C}|U = \mathcal{H}_{X^{an}}|U \Longrightarrow \mathcal{J}|U = \mathcal{H}_{X^{an}}|U . \qquad \text{cqfd.}$$

Sur cet ouvert U non vide $\mathcal{J}_x = (\mathcal{H}_{X^{an}})_x \quad \forall\, x \in U$.

Considérons la suite exacte $0 \longrightarrow 0_x \longrightarrow J_x \longrightarrow \frac{J_x}{0_x} \longrightarrow 0$.

Comme le couple $(0_x, (\mathcal{H}_{X^{an}})_x)$ est fidèlement plat ([11]) $\Longrightarrow \frac{J_x}{0_x} = 0$

ie $J_x \cong 0_x$ ie J_x de rang 1 sur 0_x.

D'après ([12]) Prop. 2 p. 8) $J \otimes \mathcal{K}_X$ est isomorphe à $\mathcal{K}_X$ ie l'homomorphisme

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_X \longrightarrow J \underset{0_X}{\otimes} \mathcal{K}_X \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Lemme 4.4 : Le morphisme $J \longrightarrow J \underset{0_X}{\otimes} \mathcal{K}_X = \mathcal{K}_X$ est injectif.

Démonstration : ([12]prop. 2) $\Longrightarrow J_x$ est sans torsion $\quad \forall\, x \in X$

$$\Longrightarrow J_x \longrightarrow J_x \underset{0_x}{\otimes} \mathcal{K}_x \quad \text{est injectif} \quad \forall\, x \in X$$

(Bourbaki Alg. géné. ch. II §7.10 coroll. 1).

Conséquence : J est isomorphe à un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{K}_X$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0_X & \longrightarrow & J \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{K}_X & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{K}_X \end{array}$$

où toutes les flèches sont injecti

On identifiera J avec le sous 0_X-faisceau cohérent de $\mathcal{K}_X$ défini par l'injection $J \longrightarrow \mathcal{K}_X$.

D'où le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X)^{an} & \hookrightarrow & J^{an} & \hookrightarrow & (\mathcal{R}_X)^{an} \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_{X^{an}} & \hookrightarrow & \mathcal{Y} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{X^{an}} \end{array}$$

Ceci permet donc d'identifier J^{an} à $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{M}_{X^{an}}$. Or par construction $\varphi \in \Gamma(X^{an}, \mathcal{Y}) = \Gamma(X^{an}, J^{an})$ ([11] §12 th. 1 p. 19) $\Longrightarrow \Gamma(X^{an}, J^{an}) = \Gamma(X, J)$.

$\Longrightarrow \varphi$ est donc une fonction rationnelle sur X.

PARTIE II

On veut montrer en utilisant le théorème A que le corps $\Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ des fonctio méromorphes d'un espace analytique irréductible compact $(X, \mathcal{H}_X)$ est tel que :

Théorème B : 1°) $\Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ est de type fini

2°) $\operatorname{tr} \deg_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M}_X) \leqslant \dim X$.

I - Quelques résultats et définitions.

Soit $(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique. On pose $\mathcal{M}(X) = \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$.

$\mathcal{M}^*(X) = \{\text{unités de } \mathcal{M}(X)\}$.

Lemme 1.1 : $\mathcal{M}^*(X) = \{f \in \mathcal{M}(X) / f_x \neq 0 \ \forall x \in X\}$.

Démonstration : * Soit $f \in \mathcal{M}^*(X)$ f_x est inversible dans $(\mathcal{M}_X)_x$ $\forall x \in X$

$\Longrightarrow f \in \{g \in \mathcal{M}(X) / g_x \neq 0 \ \forall x \in X\}$.

* Réciproquement : soit $x \in X$. $\exists$ U_x voisinage ouvert dans X , h , $g \in \Gamma(U_x, \mathcal{H}_X)$ $\mathcal{B}(g)$ nulle part dense dans U_x et tq :

$$f_b = \frac{h_b}{g_b} \qquad \forall b \in U_x$$

$g_b f_b = h_b \neq 0 \quad \forall b \in U_x \Longrightarrow h_b \neq 0 \quad \forall b \in U_x$

$\Longrightarrow \mathcal{B}(h)$ nulle part dense dans $U_x \Longrightarrow h_b$ inversible dans $(\mathcal{M}_X)_b \Longrightarrow f$ inversible dans $\mathcal{M}(X)$.

Théorème 1.2 : Soit $(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique. Si X est analytiquement irréductible alors :

$$\mathcal{M}^*(X) = \mathcal{M}(X) \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{M}(X) \text{ est un corps.}$$

Démonstration : Supposons qu'il existe $f \neq 0 \in \mathcal{M}(X)$ tq $f \notin \mathcal{M}^*(X)$

i.e. $\exists$ b tq $f_b = 0 \Longrightarrow f_x = 0$ sur un voisinage U_b de b .

Soit $Z_f = \{x / f_x = 0\}$.

Z_f est fermé : soit $y \notin Z_f$ i.e. $f_y \neq 0$.

On peut écrire $f_x = \frac{h_x}{g_x}$ dans un voisinage ouvert U_y de y tel que $\mathcal{B}(g)$ nulle part dense dans U_y . On peut supposer U_y connexe.

D'après le théorème de l'identité $h_z \neq 0 \quad g_z \neq 0 \quad \forall z \in U_y \Longrightarrow f_z \neq 0 \quad \forall z \in U_y$

Z_f est analytique et contient un ouvert non vide de X . Ceci contredit ([1] 44.32.6 p. 415).

Le rang d'une application analytique.

Soient $(X, \mathcal{H}_X)$, $(Y, \mathcal{H}_Y)$ deux espaces analytique irréductibles.

$\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques.

Définition 1.3 : 1) On appelle rang de φ en x le nombre :

$$\mathrm{rnk}_x \varphi = \dim_x X - \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) .$$

2) On appelle rang de φ sur X le nombre

$$\mathrm{rnk}\, \varphi = \sup_{x \in X} (\mathrm{rnk}_x \varphi) .$$

On a le lien suivant avec la notion de rang de la jacobienne d'une fonction holomorphe :

Proposition 1.4 : ([8] page 127). Soient $(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique irréductible, $f : X \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe. Soit X' un ouvert dense dans X $X' \subset X - S(X)$. Soit p le maximum du rang de la jacobienne de f en tout point de X' . Alors

$$p = \max_{x \in X} \mathrm{rnk}_x \varphi .$$

Lemme 1.5 : Soient $(X, \mathcal{H}_X)$, $(Y, \mathcal{H}_Y)$ deux espaces analytiques irréductibles

$$\varphi : X \to Y$$

X' un ouvert dense dans X .

Alors $\mathrm{rnk}\, \varphi = \mathrm{rnk}(\varphi | X')$.

Démonstration : Posons $\varphi|X' = \varphi'$. On a $\operatorname{rnk} \varphi \geqslant \operatorname{rnk} \varphi'$.

On a à montrer que $\forall x \in X \quad \exists x' \in X' \quad tq \quad \operatorname{rnk}_x \varphi \leqslant \operatorname{rnk}_{x'} \varphi'$.

$$\| \qquad \operatorname{rnk}_{x'} \varphi$$

Soit $x \in X$. $\exists$ un voisinage ouvert U_x de x tel que :

$$\dim \varphi^{-1}(\varphi(t)) \leqslant \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \qquad \forall z \in U_x \quad ([8] \text{ p. } 66).$$

Comme X' partout dense dans X' $U'_x = U_x \cap X' \neq \emptyset$ est un ouvert non vide de X'

Soit $x' \in U'_x$.

$$\dim_{x'} \varphi^{-1}(\varphi(x')) = \dim_{x'} \varphi'^{-1}(\varphi'(x'))$$

$$\operatorname{rnk}_{x'} \varphi' = \dim_{x'} X - \dim_{x'} \varphi^{-1}\varphi(x') \geqslant \dim_x X - \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \operatorname{rnk}_x \varphi \ .$$

Théorème (KUHLMANN) 1.6 : ([2] p. 157 Lemme 7.6). Soient $(X, \mathcal{H}_X)$, $(Y, \mathcal{H}_Y)$ deux espaces analytiques irréductibles, $\varphi : X \to Y$ une application analytique propre de rang n . Alors $\varphi(X)$ est un espace analytique irréductible de dimension n .

Lemme 1.7 : Soient $(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique irréductible, X' un sous ensemble analytique de X $X' \neq X$ $U = X - X'$. Alors U est un ouvert partout dense dans X . De plus $(U, \mathcal{H}_X|U)$ est un espace analytique irréductible.

Démonstration : Soit $S(U) = \{\text{point singulier de } U\}$ $S(U) \subset S(X)$.

Considérons $U - S(U) = X - (X' \cup S(X))$; il est connexe car X irréductible et X' $S(X)$ analytique dans X

$\Longrightarrow$ $U - S(U)$ connexe $\Longrightarrow$ U irréductible ([1] 44.32.6 page 416).

Théorème 1.8 : ([2] Rem. 3.5 page 68). $(X, \mathcal{H}_X)$, $(Y, \mathcal{H}_Y)$ deux espaces analytiques irréductibles. $\varphi : X \to Y$ une application analytique vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

1) $\dim Y = n$ et $\operatorname{rnk} \varphi = n$

2) φ est ouverte.

Alors $\exists$ un homomorphisme de corps $\varphi_* : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$.

Par conséquent si U est un ouvert non vide de X on aura une injection

$$i_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(U)$$

II - Graphe d'une fonction méromorphe.

$(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique irréductible.

Soit $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{M}(X)$ $\quad f = (f_1,\dots,f_k)$

$$P_{f_i} = \{x \in X / (f_i)_x \notin (\mathcal{H}_X)_x\}$$

$U_f = X - \bigcup_{i=1}^{k} P_{f_i}$. On a alors une application holomorphe

$$U_f \xrightarrow{f} \mathbb{C}^k \hookrightarrow (\mathbb{P})^k .$$

Soit $\overline{G_f} = \overline{\{(x,f(x)) \ , \ x \in U_f\}} \subset X \times (\mathbb{P})^k$.

Théorème 2.1 : ([13] Th. 4M p. 196, th. 3M et 3N p. 192).

1) $\overline{G}_f$ est analytique dans $X \times (\mathbb{P})^k$.

2) $\tau : \overline{G}_f \to X$ est propre et surjective.

3) Si on note $H_f = X - (S(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{k} P_{f_i}))$ τ est bianalytique au-dessus de H_f .

Théorème 2.2 : ([12] Th. 1D p. 204, th. 3M p. 192). $\tau : \overline{G}_f \to X$ induit un isomorphisme de corps $\tau_* : \mathcal{M}(\overline{G}_f) \to \mathcal{M}(X)$.

Théorème 2.3 : Soit $(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique irréductible compact tel que $\dim X = n$. Soit $f_1,\dots,f_k$ $\quad f_i \in \mathcal{M}(X)$ $\quad k > n$.

Alors $f_1,\dots,f_k$ sont algébriquement dépendantes dans le corps $\mathcal{M}(X)$.

Démonstration : X étant compact $\Longrightarrow X \times (\mathbb{P})^k$ est également compact.

$\Longrightarrow \overline{G}_f$ est compact.

$\pi_o : \overline{G}_f \to (\mathbb{P})^k$ est donc propre telle que :

$$\operatorname{rnk} \pi_o \leqslant n < k .$$

$\pi_o(\bar{G}_f) = Y$ est donc analytique compact dans $(\mathbb{P})^k$

$$\dim Y = \operatorname{rnk} \pi_o < k \quad \text{(th. 1.6)} .$$

D'après ([11] prop. 14 p. 24) Y est une sous-variété algébrique de $(\mathbb{P})^k$.

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} U_f & \longrightarrow & G_f & \longrightarrow & \pi_o(G_f) \searrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \qquad Y \cap \mathbb{C}^k \\ X & \longrightarrow & \bar{G}_f & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Si on note $\mathcal{K}(W)$ le corps des fonctions rationnelles d'une variété irréductible W on aura :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(U_f) & \longleftarrow & \mathcal{M}(G_f) & \longleftarrow & \mathcal{M}(Y \cap \mathbb{C}^k) \\ \gamma \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}(X) & & \mathcal{M}(\bar{G}_f) & & \mathcal{K}(Y \cap \mathbb{C}^k) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array} \qquad \theta$$

Les fonctions rationnelles $Y_1 \ldots Y_k$ de $\mathbb{C}^k$ induisent des fonctions rationnelles $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_k$ sur $Y \cap \mathbb{C}^k$ qui est de dimension égale à $\dim Y < k$.

De plus $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_k$ ne sont pas nulles.

Comme $\mathcal{K}(Y \cap \mathbb{C}^k)$ est le degré de transcendance $\leqslant n \implies \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_k$ sont algébriquement liées.

De plus $\theta(\bar{Y}_i) = \gamma(f_i) \implies \gamma(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont donc algébriquement liées i.e. les f_i sont algébriquement liées. cqfd.

Corollaire 2.4 : $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(X) \leqslant \dim X = n$.

Corollaire 2.5 : Soit $\pi_o \quad \bar{G}_f \to Y = \pi_o(\bar{G}_f)$ où $f = (f_1, \ldots, f_k)$ est une base de transcendance de (X) alors $\operatorname{rnk} \pi_o = k \quad (\implies Y = \mathbb{P}^k)$.

Démonstration : Si on suppose en effet que $\operatorname{rnk} \pi_o < k$, en utilisant le même raisonnement que celui du théorème précédent on aboutit au fait que les

$(f_i)_{i\leqslant 1\leqslant k}$ sont algébriquement liées.

$Y = \mathbb{P}^k$ résulte de $\operatorname{rnk} \pi_o = k = \dim Y$ et de ([4] ch. 4 prop. 2 p. 91).

III - Factorisation de Stein.

Soit $(X,\mathcal{H}_X) \xrightarrow{f} (S,\mathcal{H}_S)$ un morphisme propre d'espaces analytiques. D'après un résultat de Grauert on sait que $f_*(\mathcal{H}_X)$ est une $\mathcal{H}_S$ algèbre cohéren Soit $(T,\mathcal{H}_T)$ le spectre analytique de $f_*(\mathcal{H}_X)$ ([6] exp. 19).

On a alors le diagramme commutatif appelé factorisation de Stein de f :

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{H}_X) & \xrightarrow{g} & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & (T,\mathcal{H}_T) \\ (S,\mathcal{H}_S) & \xrightarrow{h} & \end{array}$$

D'après ([6] exp. 19 p. 19 th. 2) h est un morphisme fini. Si f est surjective h est surjective de façon évidente. Comme h est un morphisme fini et que

$h_*(\mathcal{H}_T) \simeq f_*(\mathcal{H}_X) \Longrightarrow g_*(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_T$.

Proposition 3.1 : Soit $(X,\mathcal{H}_X) \xrightarrow{f} (S,\mathcal{H}_S)$ un morphisme propre d'espaces analytiques tel que $f_*(\mathcal{H}_X) = \mathcal{H}_S$ alors les fibres de f sont connexes.

Démonstration : Soit $s \in S$. Supposons que $f^{-1}(s)$ non convexe, réunion de 2 fermés non vides disjoints F_1 , F_2 . $f^{-1}(s) = F_1 \cup F_2$.

F_1 et F_2 sont compacts $\Longrightarrow$ il existe :

un ouvert U_1 de X $\quad U_1 \supset F_1$

un ouvert U_2 de X $\quad U_2 \supset F_1$ $\quad$ et $\quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$F = X - (U_1 \cup U_2)$ fermé de X . Comme f propre $\Longrightarrow f(F)$ est un fermé de

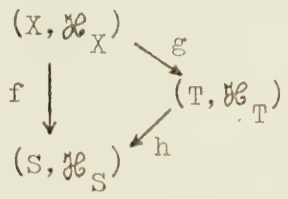
$s \notin f(F) \Longrightarrow \exists\, V$ ouvert non vide de S $\quad s \in V$, V connexe tel que

$f(F) \cap V = \emptyset$ i.e. $f^{-1}(V) \cap F = \emptyset$.

Quitte à remplacer S par V on peut supposer que $X = U_1 \cup U_2$, S connexe et $X = f^{-1}(S)$ n'est pas connexe. Ceci contredit $f_*(\mathcal{H}_X) = \mathcal{H}_S$.

Proposition 3.2 : Soit $(X, \mathcal{H}_X)$, $(S, \mathcal{H}_S)$ deux espaces analytiques irréductibles $(X, \mathcal{H}_X) \xrightarrow{f} (S, \mathcal{H}_S)$ un morphisme d'espaces analytiques propres.

Soit



la factorisation de f .

Alors rnk g = rnk f et $(\bar{T}, \mathcal{H}_T)$ est irréductible.

Démonstration : Le fait que $(T, \mathcal{H}_T)$ est irréductible provient du fait que $(X, \mathcal{H}_X)$ est irréductible.

D'autre part, h étant un morphisme fini, toute fibre de f est une réunion finie de fibres connexes de g :

$$\Longrightarrow \text{rnk } g = \text{rnk } f \ .$$

$(X, \mathcal{H}_X)$ et $(S, \mathcal{H}_S)$ étant toujours deux espaces analytiques, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{H}_X$-Module et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{H}_S$-Module inversible.

Soit $f : (X, \mathcal{H}_X) \to (S, \mathcal{H}_S)$ un morphisme d'espaces analytiques

$$f^*(\mathcal{L}) = f^{-1}(\mathcal{L}) \underset{f^{-1}(\mathcal{H}_S)}{\otimes} \mathcal{H}_X \quad \text{est un } \mathcal{H}_X\text{-Module inversi}$$

Proposition 3.3 : On a un isomorphisme canonique

$$f_*(\mathcal{M}) \underset{\mathcal{H}_S}{\otimes} \mathcal{L} \longrightarrow f_*((\mathcal{M}) \underset{\mathcal{H}_X}{\otimes} f^*(\mathcal{L}))$$

Démonstration : ([5] §0 5.4.10).

Proposition 3.4 : Si $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{M} \to \mathcal{P} \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{H}_X$ Modules, $\mathcal{R}$ un $\mathcal{H}_X$-module inversible, alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \underset{\mathcal{H}_X}{\otimes} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{M} \underset{\mathcal{H}_X}{\otimes} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{P} \underset{\mathcal{H}_X}{\otimes} \mathcal{R} \longrightarrow 0 \quad \text{est exacte}$$

On suppose maintenant que :

$(X, \mathcal{H}_X)$ est un espace analytique compact.

$(S, \mathcal{H}_S)$ est un espace analytique projectif i.e. sous-espace analytique d'un $(\mathbb{P}_m, \mathcal{H}_{\mathbb{P}_m})$.

On suppose également qu'on a un morphisme fini

$$f : (X, \mathcal{H}_X) \longrightarrow (S, \mathcal{H}_S) .$$

On note $\mathcal{M}(d)$ le faisceau $\mathcal{M} \underset{\mathcal{H}_X}{\otimes} f^*(\mathcal{H}_S(d))$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\mathcal{H}_X$-module $\mathcal{M}$.

Proposition 3.5 : Pour tout faisceau cohérent d'idéaux J de $\mathcal{H}_X$, $\exists$ un entier $d(J) \in \mathbb{N}^*$ tq pour tout $d \geqslant d(J)$ on ait une suite exacte de $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \longrightarrow H^0(X, J(d)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X(d)) \longrightarrow H^0(X, \frac{\mathcal{H}_X}{J}(d)) \longrightarrow 0 .$$

Démonstration : D'après ([6] exp. 19 p. 20 corollaire) pour tout idéal cohérent de $\mathcal{H}_X$ et tout d on obtient une suite exacte de $\mathcal{H}_S$-Modules cohérents :

$$0 \longrightarrow f_*(J(d)) \longrightarrow f_*(\mathcal{H}_X(d)) \longrightarrow f_*(\frac{\mathcal{H}_X}{J}(d)) \longrightarrow 0$$

i.e. $$0 \longrightarrow f_*(J)(d) \longrightarrow f_*(\mathcal{H}_X)(d) \longrightarrow f_*(\mathcal{H}_X/J)(d) \longrightarrow 0$$

ce qui donne lieu à la suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(S, f_*(J)(d)) \longrightarrow H^0(S, f_*(\mathcal{H}_X)(d)) \longrightarrow H^0(S, f_*(\mathcal{H}_X/J)(d)) \longrightarrow \ldots$$

([11]) $\Longrightarrow$ $f_*(J)$ et $f_*(\mathcal{H}_X)$ proviennent de faisceaux algébriques cohérents. Or ([10], n° 66 th. 1 et 2 p. 259) et ([11]) $\Longrightarrow$ $\exists$ $d(J)$ tq $\forall$ $d \geqslant d(J)$ on ait la suite exacte de $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \longrightarrow H^0(S, f_*(J)(d)) \longrightarrow H^0(S, f_*(\mathcal{H}_X)(d)) \longrightarrow H^0(S, f_*(\mathcal{H}_X/J)(d)) \longrightarrow 0$$

ie $$0 \longrightarrow H^0(X, J(d)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X(d)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X/J(d)) \longrightarrow 0 .$$

Théorème 3.6 : $(X, \mathcal{H}_X)$ est un espace analytique projectif.

Démonstration : On va construire une immersion fermée de $(X, \mathcal{H}_X)$ dans un espace projectif.

1ère étape :

Soit $a \in X$. On considère l'idéal J_a engendré en a par $\mathcal{M}_a^2$ ($\mathcal{M}_a$ idéal maximal de $(\mathcal{H}_X)_a$) et par $\mathcal{H}_X$ ailleurs. D'après la prop. précédente $\exists\, d(a)$ tq $\forall\, d \geqslant d(a)$ on ait une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$(1) \qquad \Gamma(X, \mathcal{H}_X(d(a))) \longrightarrow \frac{\mathcal{H}_a}{\mathcal{M}_a^2} \longrightarrow 0 .$$

D'autre part ([11] lemme 8 p. 24) $\exists\, d_o$ tq $\forall\, d > d_o$, $\mathcal{H}_S(d)$ est engendr par ses sections globales qui sont en nombres finis.

$\Longrightarrow f^*(\mathcal{H}_S(d))$ est engendré par ses sections globales.

La proposition précédente $\Longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}_X(d))$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Prenons $d \geqslant \sup(d_o, d(a))$ et soit $s_o, \ldots s_n$ une base de $\Gamma(X, \mathcal{H}_X(d))$.

$\exists\, i \,/\, s_i(a) \neq 0 \Longrightarrow \exists$ un voisinage $U(a)$ de a dans X dans lequel on peut définir une application :

$$\begin{aligned} U_a &\xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n \\ x &\longrightarrow (s_o(x), \ldots s_n(x)) . \end{aligned}$$

Considérons $\pi_a^{\#}(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^n})_{\pi(a)} \longrightarrow \mathcal{H}_a$.

Par construction et (1) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\dfrac{\mathcal{M}_a}{\mathcal{M}_a^2}$ est engendré par les images des $(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \Longrightarrow \pi_a^{\#}$ est surjective (lemme de Nakayama).

[sém. Cartan 60/61 exp. 13 05] $\Longrightarrow \pi$ est une immersion locale au voisinage de

Comme X est compact on peut donc, en choisissant d assez grand, construir une application $\pi : X \to \mathbb{P}_n$ qui soit localement une immersion.

2ème étape :

On montre que pour d convenable on peut construire une application π injective.

Soit $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i \times U_i$. Soit $(a,b) \notin U$.

Soit $J_{a,b}$ l'idéal cohérent des fonctions analytiques s'annulant en a et

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow J_{a,b} \longrightarrow \mathcal{H}_X \longrightarrow \mathbb{C}_a \oplus \mathbb{C}_b \longrightarrow 0 .$$

On voit alors que pour d assez grand on a une suite exacte de $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de dimension finie :

$$(2) \qquad \Gamma(X, \mathcal{H}_X(d)) \longrightarrow \mathbb{C}_a \oplus \mathbb{C}_b \longrightarrow 0 .$$

Cela signifie qu'il $\exists$ une section de $\Gamma(X, \mathcal{H}_X(d))$ qui s'annule en a et non en b i.e. que si $(s_0,\ldots s_r)$ est une base de $\Gamma(X, \mathcal{H}_X(d))$

$$(s_0(a),\ldots,s_r(a)) \neq (s_0(b),\ldots,s_r(b)) \text{ dans } \mathbb{P}_r .$$

Comme X et $\mathbb{P}_r$ sont séparés $\exists$ un voisinage $W(a,b)$ de (d,b) dans $X \times X$ tel que $\forall (a',b') \in W(a,b)$:

$$(s_0(a'),\ldots,s_r(a')) \neq (s_0(b'),\ldots,s_r(b')) \text{ dans } \mathbb{P}_r .$$

Comme $X \times X$ est compact et que $X \times X$-U est fermé dans $X \times X$, on peut recouvrir $X \times X - U$ par un nombre fini de W_j et pour d assez grand les sections de $\Gamma(X, \mathcal{H}_X(d))$ séparent les points de $X \times X - U$.

Finalement pour d assez grand une base de $\Gamma(X, \mathcal{H}_X(d))$, $s_0,\ldots,s_N$ est telle que l'application $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}_m$

$$x \longrightarrow \pi(x) = (s_0(x),\ldots,s_N(x))$$

est un morphisme d'espaces analytiques, localement une immersion, et injective.

Injective car :

soit $a,b \in X$ $a \neq b$ si $(a,b) \in U \Longrightarrow a$ et $b \in U$ et $\pi(a) \neq \pi(b)$

si $(a,b) \notin U \Longrightarrow \pi(a) \neq \pi(b)$.

X étant compact $\pi(X)$ est compact dans $\mathbb{P}_N \Longrightarrow \pi$ est une immersion fermée.

cqfd

IV - Démonstration du théorème B.

Soit $(X, \mathcal{H}_X)$ un espace analytique irréductible compact et posons $n = \dim X$

Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une base de transcendance de $\mathcal{M}(X)$

$$\pi_o : \bar{G}_f \longrightarrow (\mathbb{P})^k = Y \qquad \text{(corollaire 2.5)}$$

π_o est un morphisme propre. On peut donc factoriser π_o et on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \pi \nearrow & (Z, \mathcal{H}_Z) \\ \bar{G}_f & & \downarrow h \\ & \pi_o \searrow & Y = (\mathbb{P})^k = \pi_o(\bar{G}_f) \end{array}$$

Proposition 4.1 : 1) $(Z, \mathcal{H}_Z)$ est un espace analytique irréductible compact e

$$\dim Z = \operatorname{rnk} \pi = k$$

2) Z est aussi une variété algébrique irréductible projective.

Démonstration : 1°) résulte de ce que π_o est surjective, $\bar{G}_f$ est compact et de la proposition 3.2.

2°) résulte du théorème 3.6.

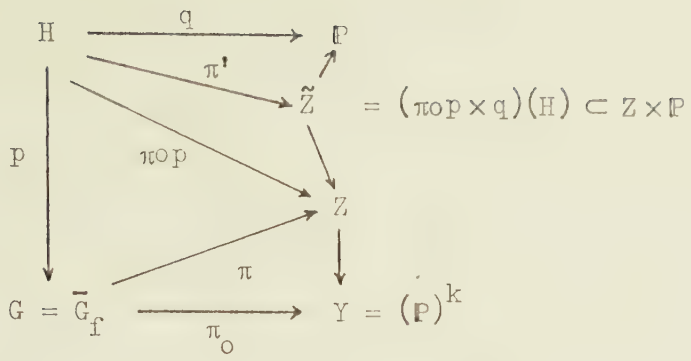
Conséquence : Le théorème A $\Longrightarrow \mathcal{M}(Z) = \mathcal{K}(Z)$.

D'après le théorème 1.8 on a un homomorphisme de corps

$$\pi_* \quad \mathcal{M}(Z) \longrightarrow \mathcal{M}(\bar{G}_f) .$$

On se propose de montrer que π_* est en fait un isomorphisme. On peut d'abord dire que $\mathcal{M}(\bar{G}_f)$ est algébrique sur $\mathcal{M}(Z)$. Soit alors $h \in \mathcal{M}(\bar{G}_f)$. Supposons que $h \notin \mathcal{M}(Z)$.

On a alors le diagramme :



où : - $H = \bar{G}_h \subset G \times \mathbb{P}$ est compact

- q la projection de H sur $\mathbb{P}$

- p la projection de H sur G

- p est propre et est un bi holomorphisme au-dessus de $G - (S(G) \cup P_h)$ ([13] th. 1 p. 185)

- $\tilde{Z}$ est une variété projective irréductible.

Lemme 4.2 : $\operatorname{rnk} \pi' = \dim \tilde{Z} = k$.

Démonstration : En effet d'après le théorème 1.6 $\operatorname{rnk} \pi' = \dim \tilde{Z}$.

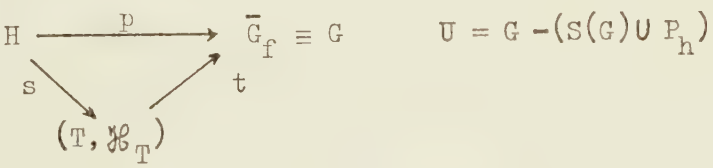
De plus comme $\dim Z = k$ et $\dim Z \times \mathbb{P} = k+1$ on a

$$k+1 \geqslant \dim \tilde{Z} \geqslant k .$$

Supposons $\dim \tilde{Z} = k+1 \implies \operatorname{trdg}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(\tilde{Z}) = k+1$ car $\mathcal{M}(\tilde{Z}) = \mathcal{K}(\tilde{Z})$ (théorème A). Comme $\mathcal{M}(\tilde{Z})$ s'injecte dans $\mathcal{M}(H)$ par $\pi'_* : \mathcal{M}(\tilde{Z}) \longrightarrow \mathcal{M}(H) \implies \operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(H) \geqslant k+1$ mais on sait que $\mathcal{M}(H) \simeq \mathcal{M}(G)$ $\implies$ nécessairement $\dim \tilde{Z} = k$.

Lemme 4.3 : Les fibres de p sont connexes.

Démonstration : p étant propre, soit :



la factorisation de Stein de p . De plus on peut supposer que H et $\bar{G}_f = G$ son normaux. Comme p est un biholomorphisme au-dessus de l'ouvert U de G l'appli

cation $(T, \mathcal{H}_T) \xrightarrow{t} G$ est un isomorphisme au-dessus de U . t est un morphisme fini. T muni de sa structure d'espace analytique réduit est alors isomorphe à G ([1] 46.22.5 p. 458).

Comme on a déjà vu que les fibres de s sont connexes $\Longrightarrow$ les fibres de p sont connexes.

Fin de la démonstration : Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\pi'} & \tilde{Z} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ G & \xrightarrow{\pi} & Z \end{array}$$

En utilisant ([4] th. 2 p. 111 et corollaire 1 p. 136) on peut trouver U ouvert non vide dans Z tq $\forall z \in U$ $u^{-1}(z)$ contient au moins $[\mathcal{K}(\tilde{Z}) : \mathcal{K}(Z)] = m$ où $\mathcal{K}(\tilde{Z})$ et $\mathcal{K}(Z)$ sont les corps de fractions rationnelles de $\tilde{Z}$ et Z . $m \neq 1$ car $h \notin \mathcal{K}(Z) = \mathcal{M}(Z)$. Soit $z \in U$. $\pi^{-1}(z)$ est connexe dans G $p^{-1}(\pi^{-1}(z)$ est connexe dans H car p est propre et à fibres connexes. Or $p^{-1}(\pi^{-1}(z)) = \pi'^{-1}(u^{-1}(z)$ aura au moins m composantes connexes.

Donc nécessairement $h \in \mathcal{M}(Z) \Longrightarrow \mathcal{M}(Z) = \mathcal{M}(\bar{G}_f)$ et $\mathcal{M}(\bar{G}_f) = \mathcal{M}(X)$ est de type fini.

REFERENCES

[1] S. Abhyankar. Local Analytic Geometry. Academic Press (1964).

[2] A. Androetti et W. Stoll. Analytic and Algebraic dependance of Meromorphic Functions. Springer Verlag.

[3] H. Cartan. Colloquium of Function Theory. Tata Institute, Bombay (1960).

[4] J. Dieudonné. Cours de géométrie algébrique, t. 2, P.U.F. (1974).

[5] A. Grothendieck et J. Dieudonné. EGA I, I.H.E.S., P.U.F.

[6] C. Houzel. Séminaire Cartan (1960-1961) exp. 18 et 19.

[7] H. Matsumura. Commutative algebra. Benjamin.

[8] R. Narasimhan. Introduction to Analytic Spaces. Springer Verlag (1966).

[9] D. Mumford. Introduction to Algebraic Geometry.

[10] J.P. Serre. F.A.C. Annals of Math. (1954).

[11] J.P. Serre. GA GA Ann Institut Fourier, tome VI (1955-1956).

[12] J.P. Serre. Journal de Math. pures et appliquées, p. 1 à 16, tome 36 (1957).

[13] H. Withney. Complex Analytic Varieties. Addison Wesley, Pub. Co. (1972).